受験番号								氏名	

令和２年度前期日程試験解答用紙（数学）

【 解 答 例 】

〔注意事項〕

・監督者の指示があるまで解答用紙を開いてはいけません。

・全てのページの所定欄に受験番号、氏名を記入しなさい。

受験番号							氏名	

令和２年度前期日程試験解答用紙（数学）

第１問

(1) n に対して，

$$n = 3k + r \qquad かつ \qquad r = 0,\ 1,\ 2 \tag{A}$$

を満たす整数 k と r が存在する。このとき，

$$\begin{aligned} n^3 = (3k+r)^3 &= 3^3k^3 + 3\times(3k)^2\times r + 3\times(3k)\times r^2 + r^3 && \text{(B)} \\ &= 3^3k^3 + 3^3k^2r + 3^2kr^2 + r^3 \\ &= 9\left(3k^3 + 3k^2r + kr^2\right) + r^3 && \text{(C)} \end{aligned}$$

ここで，$r = 0$，1，2 より，$r^3 = 0$，1，8 で r^3 は $0 \leqq r^3 < 9$ を満たすので，r^3 は n^3 を 9 で割ったときの余りである。よって，$r^3 = 0$，$r^3 = 1$，$r^3 = 8$ のいずれかが成り立つ。

(2) (a) ユークリッドの互除法により，

$$\begin{aligned} 756 - 232 \times 3 &= 60 \\ 232 - 60 \times 3 &= 52 \\ 60 - 52 \times 1 &= 8 \\ 52 - 8 \times 6 &= 4 \\ 8 - 4 \times 2 &= 0 \end{aligned}$$

よって，最大公約数は 4 である。

(b) $756x + 232y = 1$ が整数解をもつと仮定する。(a) より，

$$4(189x + 58y) = 1$$

この等式の左辺は 4 の倍数だが，右辺は 4 で割ると 1 余る。したがって，$756x + 232y = 1$ は整数解をもたない。

第１問 得　点	

受験番号								氏名	

令和２年度前期日程試験解答用紙（数学）

第２問

(1) 科目 A の得点の平均値は

$$\frac{14+2+15+7+6+10+8+5+3+12}{10}=8.2$$

科目 B の得点の平均値は

$$\frac{9+1+5+3+13+8+2+7+15+10}{10}=7.3$$

(2) 科目 A について，10 名の得点を低い方から並べると，

2，3，5，6，7，8，10，12，14，15

である。したがって，中央値は $\dfrac{7+8}{2}=7.5$ である。

(3) 科目 A について，第 1 四分位数は 5，第 3 四分位数は 12 であるから四分位範囲は $12-5=7$ である。したがって，四分位偏差は $\dfrac{7}{2}=3.5$ である。

(4) 科目 B について，出席番号が奇数の者の得点を低い方から並べると，

2，5，9，13，15

であるから，中央値は 9 である。

(5) 科目 A の得点下位 4 名の者 (出席番号 2，5，8，9) について，科目 A の得点と科目 B の得点の平均値や偏差などは表のように得られる。

出席番号	得点 A	得点 B	偏差 A	(偏差 A)^2	偏差 B	(偏差 B)^2	(偏差 A)×(偏差 B)
2	2	1	−2	4	−8	64	16
5	6	13	2	4	4	16	8
8	5	7	1	1	−2	4	−2
9	3	15	−1	1	6	36	−6
平均値	4	9		2.5		30	4

また，

$$\text{科目 A の標準偏差}=\sigma_{\mathrm{A}}=\sqrt{2.5}$$
$$\text{科目 B の標準偏差}=\sigma_{\mathrm{B}}=\sqrt{30}$$

である。したがって，科目 A，B の得点の相関係数 r は

$$r=\frac{(\text{偏差 A})\times(\text{偏差 B})\text{ の平均値}}{\sigma_{\mathrm{A}}\sigma_{\mathrm{B}}}=\frac{4}{\sqrt{2.5}\times\sqrt{30}}=\frac{4}{5\sqrt{3}}\fallingdotseq 0.46$$

第２問 得　点	

受験番号								氏名	

令和２年度前期日程試験解答用紙（数学）

第３問

(1)

$$\vec{q} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3}$$

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = k\,\vec{q} = k\left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{3}\right) = \frac{k}{3}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$$

OBRA が平行四辺形となるとき，O，A，B は一直線上になく，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \vec{a} + \vec{b}$ を満たさなければならないから，$k = 3$ である。

(3) (a)

$$\left|\vec{q}\right|^2 = \left|\frac{\vec{a} + \vec{b}}{3}\right|^2 = \frac{1}{9}\left|\vec{a}\right|^2 + \frac{2}{9}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{1}{9}\left|\vec{b}\right|^2$$

したがって，

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{35}{2}$$

(b)

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2 = \left|\frac{\vec{b}}{2} - \vec{a}\right|^2 = \frac{1}{4}\left|\vec{b}\right|^2 - \vec{a}\cdot\vec{b} + \left|\vec{a}\right|^2 = \frac{33}{2}$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right| > 0$ より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right| = \dfrac{\sqrt{66}}{2}$

第３問 得　点	

受験番号								氏名	

令和２年度前期日程試験解答用紙（数学）

第４問

(1) Q の座標は $(\cos t+\cos(at+b), \sin t+\sin(at+b))$ である。$a=-1$，$b=\dfrac{\pi}{2}$ を代入して，

$$\begin{gathered}\left(\cos t+\cos\left(-t+\frac{\pi}{2}\right), \sin t+\sin\left(-t+\frac{\pi}{2}\right)\right)\\ (\cos t-\sin(-t), \sin t+\cos(-t))\\ (\cos t+\sin t, \sin t+\cos t)\end{gathered}$$

x 座標と y 座標が同じ値 $\sin t+\cos t$ をとるので，これは直線 $y=x$ 上にある。

(2) Q の座標は $(\cos t+\cos(-2t), \sin t+\sin(-2t))$=$(\cos t+\cos 2t, \sin t-\sin 2t)$ である。

$$\begin{aligned}\mathrm{OQ}^2 &= (\cos t+\cos 2t)^2+(\sin t-\sin 2t)^2\\ &= \cos^2 t+2\cos t\cos 2t+\cos^2 2t+\sin^2 t-2\sin t\sin 2t+\sin^2 2t\\ &= \cos^2 t+\sin^2 t+\cos^2 2t+\sin^2 2t+2\cos t\cos 2t-2\sin t\sin 2t\\ &= 1+1+2(\cos t\cos 2t-\sin t\sin 2t)\\ &= 2+2(\cos t\cos 2t-\sin t\sin 2t) \text{ ここで加法定理により}\\ &= 2+2\cos 3t\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{OQ}=\sqrt{2+2\cos 3t}$ である。これは $\cos 3t$ が最大値・最小値をとるときに最大値・最小値をとる。

$\cos\theta$ は $\theta=(2n+1)\pi$ (n は整数) のとき最小値 -1 をとり，このうち $0\leqq t<2\pi$ にあてはまるのは $n=0$ または $n=1$ または $n=2$ のときで，$t=\dfrac{\pi}{3}, \pi, \dfrac{5}{3}\pi$ である。このとき $\sqrt{2+2\cos 3t}$ の最小値は 0 である。そのとき，Q の座標は (0，0) である。

$\cos\theta$ は $\theta=2n\pi$ (n は整数) のとき最大値 1 をとるので，$\sqrt{2+2\cos 3t}$ が最大値をとるのは，$t=\dfrac{2}{3}n\pi$ (n は整数) のとき。このうち $0\leqq t<2\pi$ にあてはまるのは $n=0$ または $n=1$ または $n=2$ のときで，$t=0, \dfrac{2}{3}\pi, \dfrac{4}{3}\pi$ である。このとき $\sqrt{2+2\cos 3t}$ の最大値は 2 となる。

Qの座標は $(\cos t+\cos 2t, \sin t-\sin 2t)$ であるので，あてはめると (2，0) と $(-1, \sqrt{3})$ と $(-1, -\sqrt{3})$

第４問 得　点	